等均值不等方差样本的均值UMVUE

Exercise 4 (\ #3 .4). Let $(X_1, \ldots, X_m)$ be a random sample from $N\left(\mu_x, \sigma_x^2\right)$ and let $Y_1, \ldots, Y_n$ be a random sample from $N\left(\mu_y, \sigma_y^2\right)$. Assume that X_i 's and Y_j 's are independent.
(i) Assume that $\mu_x \in \mathcal{R}, \mu_y \in \mathcal{R}, \sigma_x^2>0$, and $\sigma_y^2>0$. Find the UMVUE's of $\mu_x-\mu_y$ and $\left(\sigma_x / \sigma_y\right)^r$, where $r>0$ and $r<n$.
(ii) Assume that $\mu_x \in \mathcal{R}, \mu_y \in \mathcal{R}$, and $\sigma_x^2=\sigma_y^2>0$. Find the UMVUE's of σ_x^2 and $\left(\mu_x-\mu_y\right) / \sigma_x$.
(iii) Assume that $\mu_x=\mu_y \in \mathcal{R}, \sigma_x^2>0, \sigma_y^2>0$, and $\sigma_x^2 / \sigma_y^2=\gamma$ is known.

Find the UMVUE of μ.
(iv) Assume that $\mu_x=\mu_y \in \mathcal{R}, \sigma_x^2>0$, and $\sigma_y^2>0$. Show that a UMVUE of μ does not exist.
(v) Assume that $\mu_x \in \mathcal{R}, \mu_y \in \mathcal{R}, \sigma_x^2>0$, and $\sigma_y^2>0$. Find the UMVUE of $P\left(X_1 \leq Y_1\right)$.
(vi) Repeat (v) under the assumption that $\sigma_x=\sigma_y$.

设 $\mathcal{P}$ 表示 $(X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_n)$ 的所有可能分布的族，$\mathcal{P}_\gamma$ 表示 $\mathcal{P}$ 的子族，其中 $\sigma_x^2=\gamma \sigma_y^2$.

假设 T 是 μ 的 UMVUE.

根据引理 1 的结果，当将 $\mathcal{P}_\gamma$ 视为 $(X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_n)$ 的分布族时，
$T_\gamma=(m \bar{X}+\gamma n \bar{Y}) /(m+\gamma n)$ 是 μ 的 UMVUE.

因为对于任意 $P \in \mathcal{P}$，都有 $E\left(T-T_\gamma\right)=0$，并且 T 是 UMVUE，所以对于任意 $P \in \mathcal{P}$，有 $E\left[T\left(T-T_\gamma\right)\right]=0$.
类似地，对于任意 $P \in \mathcal{P}_\gamma$，有 $E\left[T_\gamma\left(T-T_\gamma\right)\right]=0$.

因此，对于任意 $P \in \mathcal{P}_\gamma$，有 $E(T-T_\gamma)^2=0$，从而 $T=T_\gamma$ 几乎处处成立（a.s. $\mathcal{P}_\gamma$）.

由于 a.s. $\mathcal{P}_\gamma$ 意味着 a.s. $\mathcal{P}$，因此对于任意 $\gamma>0$，有 $T=T_\gamma$ a.s. $\mathcal{P}$.

这表明 T 依赖于 $\gamma=\sigma_x^2 / \sigma_y^2$，这不符合题意. 故不存在.

引理 1

假设 $\mu_x=\mu_y \in \mathcal{R}, \sigma_x^2>0, \sigma_y^2>0$, 而且 $\sigma_x^2 / \sigma_y^2=\gamma$ 已知. μ 的 UMVUE 是

$$\frac{m \bar{X}+\gamma n \bar{Y}}{m+\gamma n}.$$

证明:
X_i 和 Y_j 的联合分布属于指数分布族，其完全充分统计量为 $\left(m \bar{X}+\gamma n \bar{Y}, \sum_{i=1}^m X_i^2+\gamma \sum_{j=1}^n Y_j^2\right)$，对应参数 $\left(\mu_x, \sigma_x^2\right)$.

因此，μ_x 的无偏最小方差估计量（UMVUE）为：

$$\frac{m \bar{X}+\gamma n \bar{Y}}{m+\gamma n}$$