正态总体下样本均值和样本方差的分布

正态总体下样本均值和样本方差的分布

对正态总体, 我们有

> ✎ Thr
>
> 定理 3. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ i.i.d. $\sim N\left(a, \sigma^2\right)$, 则
>
> $$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-a}{\sigma}\right)^2 \sim \chi_n^2$$

此处我们给出一个利用特征函数的证明方法.

Proof. 做变换: $Y_1=\bar{X}, Y_2=X_2, \cdots, Y_n=X_n$, 因此由

$$\begin{aligned} x_1 &= ny_1-y_2-\cdots-y_n \\ x_2 &= y_2 \\ &\vdots \\ x_n &= y_n \end{aligned}$$

$$以及

\sum{i=1}^{n}\left(x{i}-a\right)^{2}=\sum{1}^{n}\left(x{i}-\bar{x}\right)^{2}+n(\bar{x}-a)^{2}

可以得到\$$Y_1, \cdots, Y_n$\$的联合密度为\$$f\left(y_1, \cdots, y_n\right)=n\left(2\pi\sigma^2\right)^{-n/2}\exp\left\{-\frac{\left(ny_1-y_2-\cdots-y_n-y_1\right)^2}{2\sigma^2}\right.$ -

\sqrt{n}\left(2 \pi \sigma^{2}\right)^{-(n-1) / 2} \exp \left(-q / 2 \sigma^{2}\right)

其中\$$q=\left(ny_1-y_2-\cdots-y_n-y_1\right)^2+\sum_2^n\left(y_i-y_1\right)^2$\$. 注意到

(n-1) S^{2}=\sum{1}^{n}\left(X{i}-\bar{X}\right)^{2}=\left(n Y{1}-Y{2}-\cdots-Y{n}-Y{1}\right)^{2}+\sum{2}^{n}\left(Y{i}-Y_{1}\right)^{2}=Q

因此\$$(n-1)S^2$\$在给定\$$Y_1=y_1$\$的条件特征函数为

\begin{aligned}

E\left(e^{i t Q / \sigma^{2}} \mid y{1}\right) & =\int \cdots \int \sqrt{n}\left(2 \pi \sigma^{2}\right)^{-(n-1) / 2} \exp \left(-(1-2 i t) q / 2 \sigma^{2}\right) d y{2} \cdots d y_{n} \

& =(1-2 i t)^{-(n-1) / 2} \int \cdots \int \sqrt{n}\left[\frac{1-2 i t}{2 \pi \sigma^{2}}\right]^{(n-1) / 2} \exp \left{-(1-2 i t) q / 2 \sigma^{2}\right} d y{2} \cdots d y{n} \

& =(1-2 i t)^{-(n-1) / 2}

\end{aligned}

此即$(n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-1}$. 而且此条件分布和$Y_1$无关, 因此$S^2$和$Y_1$相互独立. > [!Thr] > 定理4.

> T=\|frac{\|sqrt{n}(\|bar{X}-a)}{S} \|sim t_{n-1}

Thr

定理 5. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ i.i.d. $\sim N\left(a_1, \sigma_1^2\right), Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ i.i.d. $\sim N\left(a_2, \sigma_2^2\right)$, 且假定 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, 合样本 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ 与 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 相互独立, 则

$$T=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(a_1-a_2)}{S_w} \cdot \sqrt{\frac{mn(n+m-2)}{n+m}} \sim t_{n+m-2}$$

此处 $(n+m-2)S_w^2=(m-1)S_1^2+(n-1)S_2^2$, 此处

$$S_1^2=\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^m\left(X_i-\bar{X}\right)^2, \quad S_2^2=\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^n\left(y_j-\bar{Y}\right)^2$$

Thr

定理 6. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ i.i.d. $\sim N\left(a_1, \sigma_1^2\right), Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ i.i.d. $\sim N\left(a_2, \sigma_2^2\right)$, 且合样本 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ 和 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 相互独立, 则

$$F=\frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \sim F_{m-1,n-1}$$

此处 S_1^2 和 S_2^2 定义如前所述.

Thr

定理 7. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ i.i.d. 服从指数分布: $f(x,\lambda)=\lambda e^{-\lambda x} I_{[x>0]}$, 则有

$$2\lambda n\bar{X}=2\lambda\sum_{i=1}^n X_i \sim \chi^2_{2n}$$