指数族

零. 是什么

在统计理论问题中, 许多统计推断方法的优良性, 对一类范围广泛的统计模型 (亦称为分布族), 有较满意的结果.
这类分布族称为指数族.
常见的分布, 如**正态分布、二项分布、Poisson 分布、负二项分布、指数分布和Gamma 分布等**都属于这类分布族,
这些表面上看来各不相同的分布, 其实它们都可以统一在一种包罗更广的一类称为指数族的模式中. 当然引进这种分布族的理由, 主要不在于谋求形式上的统一, 而在于这种统一抓住了它们的共性, 因此许多统计理论问题, 对指数族获得较彻底的解决.

一、定义与例子}

Def

定义 1. 设 $\mathscr{F}=\{f(x, \theta): \theta \in \Theta\}$ 是定义在样本空间 $\mathscr{X}$ 上的样本分布族, 其中 Θ 为参数空间. 若其概率函数 $f(x, \theta)$ 可表示成如下形式

$$
f(x, \theta)=C(\theta) \exp \left\{\sum_{i=1}^k Q_i(\theta) T_i(x)\right\} h(x)
$$

则称此样本分布族为指数型分布族(简称指数族 (Exponential family). 其中 k 为自然数, $C(\theta)>0$ 和 $Q_i(\theta)(i=1,2 \cdots, k)$ 都是定义在参数空间 Θ 上的(可测) 函数, $h(x)>0$ 和 $T_i(x)(i=1,2, \cdots, k)$ 都是定义在 $\mathscr{X}$ 上的(可测) 函数.

指数族的一个性质是族中的所有分布具有共同的支撑集 ($G(x)$ 称为概率函数 $p(x)$ 的支撑集,若 $G(x)=\{x: p(x)>0\}$).
由定义可见指数族支撑集 $\{x: f(x, \theta)>0\}=\{x: h(x)>0\}$ 与 θ 无关. 任一分布族若其支撑集与 θ 有关, 则族中分布不再具有共同支撑集, 因而必不是指数族.

例1. 正态分布族 $\left\{N\left(\mu, \sigma^2\right):-\infty<\mu<\infty, \sigma^2>0\right\}$ 是指数族.
Proof. 设 $\mathbf{X}=\left(X_1, \cdots, X_n\right)$ 为从正态分布 $N\left(\mu, \sigma^2\right)$ 中抽取的简单样本, $\mathbf{X}$ 的联合密度为

$$
f\left(\mathbf{x} ; \mu, \sigma^2\right)=(\sqrt{2 \pi} \sigma)^{-n} \exp \left\{-\frac{1}{2 \sigma^2} \sum_{i=1}^n\left(x_i-\mu\right)^2\right\} \tag{1.1}
$$

记 $\theta=\left(\mu, \sigma^2\right)$, 则参数空间为 $\Theta=\left\{\theta=\left(\mu, \sigma^2\right):-\infty<\mu<+\infty, \sigma^2>0\right\}$. 将 1.1 改写为

$$
\begin{aligned}
f(\mathbf{x}, \theta) & =(\sqrt{2 \pi} \sigma)^{-n} e^{-\frac{n \mu^2}{2 \sigma^2}} \exp \left\{\frac{\mu}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i-\frac{1}{2 \sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i^2\right\} \\
& =C(\theta) \exp \left\{Q_1(\theta) T_1(\mathbf{x})+Q_2(\theta) T_2(\mathbf{x})\right\} h(\mathbf{x}) \qquad (1.2)
\end{aligned}
$$

此处 $C(\theta)=(\sqrt{2\pi}\sigma)^{-n}e^{-\frac{n\mu^2}{2\sigma^2}}, Q_1(\theta)=\mu/\sigma^2, Q_2(\theta)=-\frac{1}{2\sigma^2}, T_1(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^n x_i, T_2(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^n x_i^2, h(\mathrm{x})\equiv 1$. 因此由定义可知正态分布族 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$ 是指数族.

例2. 二项分布族 $\{b(n,\theta):0<\theta<1\}$ 是指数族.
Proof. 设 $X\sim$ 二项分布 $b(n,\theta)$, 其概率函数为

$$
\begin{aligned}
p(x,\theta)=P_\theta(X=x)&=\binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x}\\
&=\binom{n}{x}\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^x(1-\theta)^n,\quad x=0,1,2,\cdots,n
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

此处样本空间 $\mathscr{X}=\{0,1,2,\cdots,n\}$, 参数空间 $\Theta=\{\theta:0<\theta<1\}=(0,1)$. 将上式改写为

$$
\begin{aligned}
p(x,\theta)&=(1-\theta)^n\exp\left\{x\log\frac{\theta}{1-\theta}\right\}\cdot\binom{n}{x}\\
&=C(\theta)\exp\left\{Q_1(\theta)T_1(x)\right\}h(x).
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

此处 $C(\theta)=(1-\theta)^n, Q_1(\theta)=\log\frac{\theta}{1-\theta}, T_1(x)=x, h(x)=\binom{n}{x}$, 按定义二项分布族 $b(n,\theta)$ 也是指数族.

例3. 均匀分布族 $\{U(0,\theta),\theta>0\}$ 不是指数族.
Proof. 由指数族的定义可知, 其支撑集为 $\{x:p(x,\theta)>0\}=\{x:h(x)>0\}$, 它与 θ 无关. 而均匀分布族 $\{U(0,\theta),\theta>0\}$ 的支撑集为 $\{x:p(x,\theta)>0\}=(0,\theta)$ 与 θ 有关, 因此它不是指数族.

二、指数族的自然形式及自然参数空间

在指数族的定义 $C(\theta)\exp\left\{\sum_{i=1}^k Q_i(\theta)T_i(x)\right\}h(x)$ 中,
若用 φ_i 代替 $Q_i(\theta)$, 而将 $C(\theta)$ 表成 φ的函数 $C^*(\varphi),\varphi=(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_k)$,
故其表达式变为 $C^*(\varphi)\exp\left\{\sum_{i=1}^k\varphi_iT_i(x)\right\}h(x)$.
再改 φ_i为 $\theta_i, i=1,2,\cdots,k$, 则上式即为: $C(\theta)\exp\left\{\sum_{i=1}^k\theta_iT_i(x)\right\}h(x)$,
此式称为指数族的自然形式(或称为标准形式).
故有下列定义

定义 2. 如果指数族有下列形式

$$
f(x,\theta)=C(\theta)\exp\left\{\sum_{i=1}^n\theta_iT_i(x)\right\}h(x)
\tag{1.5}
$$

则称为指数族的自然形式 (Natural form). 此时集合

$$
\Theta^*=\left\{(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k):\int_{\mathscr{X}}\exp\left\{\sum_{i=1}^k\theta_iT_i(x)\right\}h(x)dx<\infty\right\}
\tag{1.6}
$$

称为自然参数空间 (Natural parametric space).

例4. 将正态分布族表示为指数族的自然形式, 并求出其自然参数空间.

Proof. 由

$$f\left(\mathbf{x};\mu,\sigma^2\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n e^{-\frac{n\mu^2}{2\sigma^2}}\exp\left\{\frac{\mu}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n x_i-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n x_i^2\right\}$$

参数空间 $\Theta=\left\{\left(\mu,\sigma^2\right):-\infty<\mu<\infty,0<\sigma^2<\infty\right\}$. 令 $\varphi_1=\mu/\sigma^2,\varphi_2=-\frac{1}{2\sigma^2}$, 解出 $\sigma=\sqrt{-\frac{1}{2\varphi_2}},\mu^2/\sigma^2=\varphi_1^2\left(-\frac{1}{2\varphi_2}\right)$, 因此有 $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n e^{-\frac{n\mu^2}{2\sigma^2}}=\left(\sqrt{\frac{-2\varphi_2}{2\pi}}\right)^n e^{\frac{n\varphi_1^2}{4\varphi_2}}\triangleq C^*(\varphi),\varphi=(\varphi_1,\varphi_2)$,

$$\begin{aligned}f(\mathbf{x},\varphi)&=C^*(\varphi)\exp\left\{\varphi_1\sum_{i=1}^n x_i+\varphi_2\sum_{i=1}^n x_i^2\right\}h(\mathbf{x})\\&=C^*(\varphi)\exp\left\{\varphi_1T_1(\mathbf{x})+\varphi_2T_2(\mathbf{x})\right\}h(\mathbf{x})\end{aligned}$$

再改 φ_i 为 $\theta_i(i=1,2)$, 上式变为

$$f(\mathbf{x},\theta)=C^*(\theta)\exp\left\{\theta_1T_1(\mathbf{x})+\theta_2T_2(\mathbf{x})\right\}h(\mathbf{x}) \tag{1.7}$$

此为其自然形式. 其自然参数空间为

$$\Theta^*=\{(\theta_1,\theta_2):-\infty<\theta_1<+\infty,-\infty<\theta_2<0\}$$

\section*{三、指数族的性质}

定理 1. 在指数族的自然形式下，自然参数空间为凸集.

证明的方法如下: 设任给 $\theta^{(1)}=\left(\theta_1^1,\cdots,\theta_k^1\right),\theta^{(0)}=\left(\theta_1^0,\cdots,\theta_k^0\right)$ 皆属于自然参数空间 Θ^*,设 $0<\alpha<1$, 令 $\theta=\alpha\theta^{(1)}+(1-\alpha)\theta^{(0)}$ (即 $\theta_i=\alpha\theta_i^1+(1-\alpha)\theta_i^0,i=1,2,\cdots,k$), 若能证明 $\theta\in\Theta^*$,则按凸集的定义, 定理得证.

定理 2. 设指数族的自然形式中, 自然参数空间有内点, $g(x)$ 是任一有界可积函数, 则对

$$G(\theta)=\int_{\mathscr{X}}g(x)\exp\left\{\sum_{j=1}^k\theta_jT_j(x)\right\}h(x)dx$$

有

$$\frac{\partial^m G(\theta)}{\partial\theta_1^{m_1}\cdots\partial\theta_k^{m_k}}=\int_{\mathscr{X}}\frac{\partial^m}{\partial\theta_1^{m_1}\cdots\partial\theta_k^{m_k}}\left[g(x)\exp\left\{\sum_{j=1}^k\theta_jT_j(x)\right\}h(x)\right]dx$$

其中 $\sum_{j=1}^k m_j=m$, 即对 $G(\theta)$ 关于 θ 的任意阶偏导数可在积分下求得.

此定理的更一般的形式及其证明查看参考文献[1] P_{21} 定理1.2.1.