均匀分布情形

均匀分布情形

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ i.i.d. $\sim$ 均匀分布 $U(0,1)$,其分布函数和密度函数分别为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x \leq 0, \\ x, & 0<x<1, \\ 1, & x \geq 1.\end{cases} \quad \text{和} \quad f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1, \\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

设 $\left(X_{(1)}, X_{(2)}, \cdots, X_{(n)}\right)$ 为样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的次序统计量,次序统计量 $X_{(m)}$ 的密度函数为

$$f_m(x)=m\binom{n}{m} x^{m-1}(1-x)^{m-n} I_{[0,1]}(x) \tag{2.3}$$

由前可知 $\left(X_{(i)}, X_{(j)}\right)$ 的联合密度为

$$f_{ij}(x)=\begin{cases}\frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!} x^{i-1}(y-x)^{j-i-1}(1-x)^{n-j}, & 0<x<y<1, \\ 0, & \text{其它.}\end{cases}$$

而 $\left(X_{(1)}, X_{(2)}, \cdots, X_{(n)}\right)$ 的联合密度为

$$f_{1,2,\cdots,n}\left(x_{(1)}, x_{(2)}, \cdots, x_{(n)}\right)=\begin{cases}n!, & \text{当 } 0<x_{(1)}<\cdots<x_{(n)}<1, \\ 0, & \text{其它.}\end{cases}$$

令 $F(z)=z, 0<z<1, F(v+z)=v+z, 0<v+z<1$,得到在均匀分布 $U(0,1)$ 场合 (V, Z) 的联合密度

$$g_{ij}(v, z)=\begin{cases}\frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!} z^{i-1} v^{j-i-1}[1-(v+z)]^{n-j}, \\ \qquad \text{当 } 0<z<1,\ 0<v+z<1, \\ 0, \qquad \text{其它.}\end{cases}$$

此时 $V=X_{(j)}-X_{(i)}$ 的边缘密度,通过计算积分 $\int_0^{1-v} g_{i,j}(v, z) dz$ 得

$$g_{nij}(v)=\begin{cases}\frac{n!}{(j-i-1)!(n-j+i)!} v^{j-i-1}(1-v)^{n-j+1}, & \text{当 } 0<v<1, \\ 0, & \text{其它.}\end{cases}$$

特别极差 $R=X_{(n)}-X_{(1)}$ 的密度函数 $g_{1n}(r)$ 为将前式中的 v 换成 r,将 j 和 i 分别用 n 和 1 代替得到

$$g_{1n}(r)=\begin{cases}n(n-1) r^{n-2}(1-r), & \text{当 } 0<r<1, \\ 0, & \text{其它.}\end{cases}$$