双样本不同均值不同方差检验

设 $(X_{i1}, \ldots, X_{in_i}), i = 1, 2$ 是分别从 $N\left(\mu_i, \sigma_i^2\right)$ 抽取的两组独立随机样本，其中所有参数均未知。定义 $\theta = \mu_1 - \mu_2$, $\bar{X}_i$ 和 S_i^2 分别为第 i 组样本的样本均值和样本方差 $(i = 1, 2)$。

(i) 证明 $R(X, \theta)$ 是渐近枢轴量，并使用 $R(X, \theta)$ 构造 θ 的 $1 - \alpha$ 渐近置信区间。
给定

$$R(X, \theta) = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \theta}{\sqrt{n_1^{-1} S_1^2 + n_2^{-1} S_2^2}}$$

证明：

注意

$$R(X, \theta) = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \theta}{\sqrt{n_1^{-1} \sigma_1^2 + n_2^{-1} \sigma_2^2}} \cdot \frac{\sqrt{\sigma_1^2 + (n_1/n_2)\sigma_2^2}}{\sqrt{S_1^2 + (n_1/n_2) S_2^2}}$$

1. $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ 的分布为 $N\left(\theta, n_1^{-1}\sigma_1^2 + n_2^{-1}\sigma_2^2\right)$。
2. 根据 $S_i^2 \to_p \sigma_i^2 (i = 1, 2)$，有

$$\frac{\sqrt{\sigma_1^2 + (n_1/n_2)\sigma_2^2}}{\sqrt{S_1^2 + (n_1/n_2) S_2^2}} \to_p 1$$

因此，$R(X, \theta) \to_d N(0, 1)$，即 $R(X, \theta)$ 是渐近枢轴量。

渐近置信区间：

利用 $R(X, \theta)$，θ 的 $1 - \alpha$ 渐近置信区间为

$$\left[\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - z_{\alpha/2}\sqrt{n_1^{-1} S_1^2 + n_2^{-1} S_2^2}, \bar{X}_1 - \bar{X}_2 + z_{\alpha/2}\sqrt{n_1^{-1} S_1^2 + n_2^{-1} S_2^2}\right]$$

其中 z_α 是标准正态分布 $N(0, 1)$ 的 $(1 - \alpha)$ 分位数。

证毕.

(ii) 证明 $t(X, \theta)$ 是渐近枢轴量,给定

$$t(X, \theta) = \frac{\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \theta\right) / \sqrt{n_1^{-1} + n_2^{-1}}}{\sqrt{\left[(n_1 - 1) S_1^2 + (n_2 - 1) S_2^2\right] / (n_1 + n_2 - 2)}}$$

证明：

如果 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$，则 $t(X, \theta)$ 的分布为自由度 $n_1 + n_2 - 2$ 的 t 分布。

若 $\sigma_1 \neq \sigma_2$ 但 $n_1/n_2 \to 1$，注意

$$t(X,\theta) = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \theta}{\sqrt{n_1^{-1}\sigma_1^2 + n_2^{-1}\sigma_2^2}} \cdot g(X)$$

其中

$$g(X) = \frac{\sqrt{n_1+n_2-2}\sqrt{\sigma_1^2 + (n_1/n_2)\sigma_2^2}}{\sqrt{n_1+n_2}\sqrt{[(n_1-1)/n_2]S_1^2 + [(n_2-1)/n_1]S_2^2}}$$

根据 $n_1/n_2 \to 1$ 和 $S_i^2 \to_p \sigma_i^2$，可得 $g(X) \to_p 1$。

因此，$t(X,\theta) \to_d N(0,1)$，即 $t(X,\theta)$ 是渐近枢轴量。