位置-尺度族

位置-尺度族

如果随机变量 X 具有分布函数 F，则 $Y = a + bX$ 的分布函数 $F_{a,b}$ 定义为

$$F_{a,b}(y) = P(a + bX \le y) = F\left(\frac{y-a}{b}\right), \quad b > 0$$

与 F 相关联的分布族 $\{F_{a,b} : a \in \mathbb{R}, b > 0\}$ 称为位置-尺度族（或 "X 的位置-尺度族"）。

如果 F 有概率密度函数 f，则 $F_{a,b}$ 的概率密度 $f_{a,b}$ 表示为

$$f_{a,b}(y) = \frac{d}{dy}F\left(\frac{y-a}{b}\right) = \frac{1}{b}f\left(\frac{y-a}{b}\right)$$

如果 $EX = 0$ 且 $\operatorname{var} X = 1$，则 Y 的期望值和方差分别是 a 和 b^2，也对应于分布 $F_{a,b}$。

每个（标准）分布（如正态分布、柯西分布、指数分布等）都对应一个位置-尺度族。

需要注意的是，同一个位置-尺度族中的成员不一定总是具有相同的名称：例如，标准柯西分布对应的所有位置-尺度族的成员不全是柯西分布。

相反，具有相同名称的分布并不总是属于同一个位置-尺度族：例如，不同自由度的 χ^2 分布不属于同一个位置-尺度族。

例 正态分布

设 X 是一个服从 $N(0, 1)$ 分布的随机变量。根据概率论的知识，我们知道 $Y = a + bX$（其中 $b > 0$）服从 $N(a, b^2)$ 分布。因此，与 $N(0, 1)$ 分布相关的所有位置-尺度族的成员都是正态分布。反之，如果 Y 服从 $N(a, b^2)$ 分布，则 Y 与 $a + bX$ 具有相同的分布，其中 X 服从标准正态分布，因此 $N(a, b^2)$ 分布是与标准正态分布相关的某个位置-尺度族的成员。

换句话说，与 $N(0, 1)$ 分布相关的所有位置-尺度族的成员都是正态分布，反之，所有正态分布都属于与 $N(0, 1)$ 分布相关的某个位置-尺度族。

"QQ 图" 是用于为给定样本 $x_1, \ldots, x_n$ 找到合适位置-尺度族的图形工具，这是一种基于分位数函数的方法。如果对于给定的 $\alpha \in (0, 1)$，存在且仅存在一个数 $x_\alpha \in \mathbb{R}$ 满足 $F(x_\alpha) = \alpha$，那么 x_α 称为 F 的 α-分位数，用 $F^{-1}(\alpha)$ 表示。正如如符号所暗示的，函数 $\alpha \mapsto F^{-1}(\alpha)$ 是分位数函数，即 F 的反函数，当然前提是它是良定义的。如果 F 严格递增且连续，那么对于所有 $\alpha \in (0, 1)$，都有 $F(F^{-1}(\alpha)) = \alpha$ 且对于所有 $x \in \mathbb{R}$，$F^{-1}(F(x)) = x$。

例 指数分布

设 X 是一个服从参数为 λ 的指数分布的随机变量。X 的分布函数 F 给定为 $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$，其中 $x \ge 0$。分位数函数 F^{-1} 给定为 $F^{-1}(\alpha) = -\log(1 - \alpha)/\lambda$，其中 $\alpha \in (0, 1)$。

由于分布函数可以表现出跳跃和常值区间，一般情况下，对于给定的 α，方程 F (x) = α 可能没有解、恰好有一个解或有无限多个解。为了在第一种和最后一种情况下也能谈论 α -分位数，我们也更新了 F 的分位数函数定义。

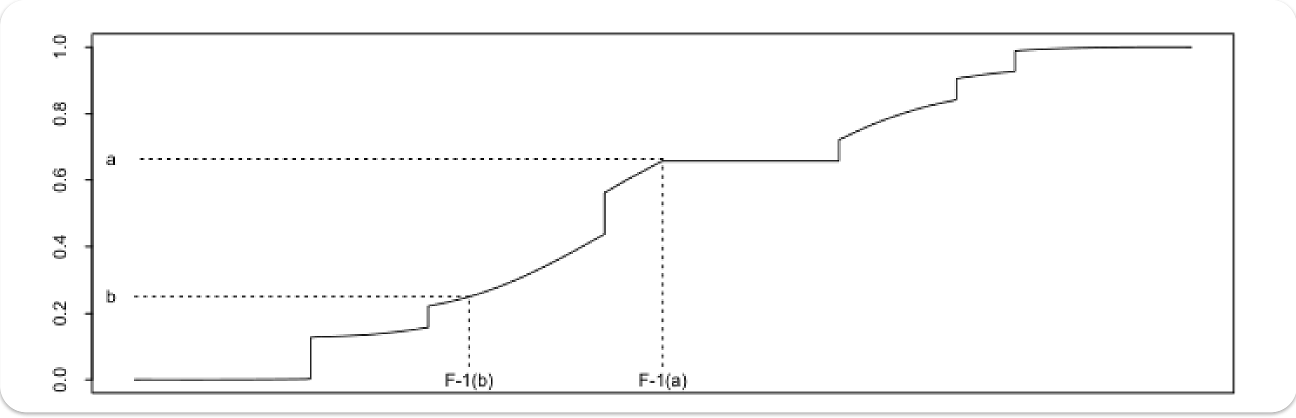

图: 一个分布和里面的两个分位数